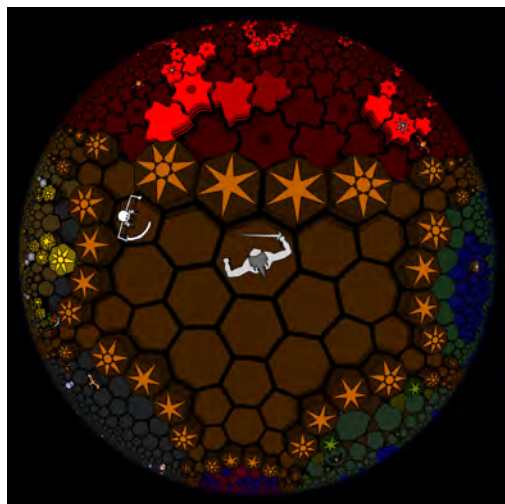


l'App Store, en canvi, només hi ha la versió de pagament. En cas que preferiu jugar-hi a l'ordinador, també el trobareu a plataformes com Steam o a la pàgina web del joc⁵, des d'on fins i tot us podeu descarregar el codi font del programa.



HyperRogue, captura de pantalla extreta de la pàgina web del desenvolupador

HyperRogue és un joc de l'estil *roguelike*. És a dir, controlem un personatge en un entorn bidimensional que actua per torns i tenim com a objectiu matar els monstres i recollir els tresors que ens anem trobant. La peculiaritat d'aquest joc és que l'acció té lloc en el pla hiperbòlic. Més concretament, els elements del joc es troben en una tessellació del pla hiperbòlic que està decorada amb motius que recorden algunes il·lustracions de M. C. Escher. Aquest fet, que podria semblar una simple curiositat, té implicacions molt significatives tant pel que fa a les situacions que ens podem trobar com a les estratègies per resoldre-les. Si bé és cert que al principi costa una mica acostumar-se al moviment psicodèlic dels objectes en el disc de Poincaré, al cap de poc el joc es converteix en una eina lúdica per descobrir visualment molts aspectes de la geometria hiperbòlica. Ve acompanyat d'un tutorial que no només ens ensenya com jugar, sinó que també ens explica quines peculiaritats de la geometria hiperbòlica són rellevants en diverses situacions i altres curiositats del pla hiperbòlic.

Geogebra

Geometria esfèrica amb GeoGebra

Alba Blasco

Membre de l'Associació Catalana de GeoGebra

Any rere any treballem la geometria plana a les aules de secundària, però pot ser molt interessant i enriquidor fer unes pinzellades de geometria esfèrica amb l'alumnat d'ESO. Són molts els materials sobre geometria esfèrica que podeu trobar a la web de GeoGebra; no obstant això, aquest breu article pretén donar-vos eines i idees perquè us feu la vostra pròpia construcció i l'adapteu com vosaltres vulgueu. Al número 46 de la *SCM/Notícies* ja es va parlar de la construcció de superfícies reglades, que farem servir més endavant.

Conceptes previs

Una circumferència màxima o cicle és la circumferència que s'obté de la intersecció entre l'esfera i un pla que passa pel seu centre. El

radi de la circumferència és, doncs, el mateix que el de l'esfera.

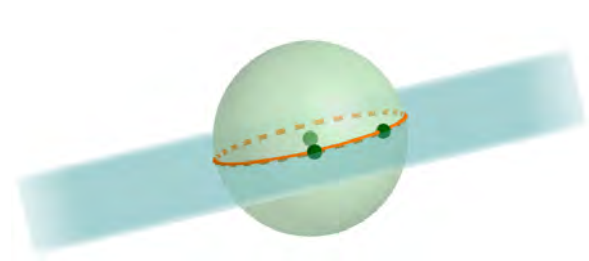


Figura 1. Circumferència màxima

La distància esfèrica entre dos punts A i B és la longitud del menor arc del cicle que conté A i B .

⁵<https://roguetemple.com/z/hyper/>

Un triangle esfèric és la regió de superfície esfèrica limitada per tres arcs de circumferències màximes que es tallen dos a dos. Els costats d'un triangle esfèric s'anomenen arcs i els mesurarem en cm i en graus.

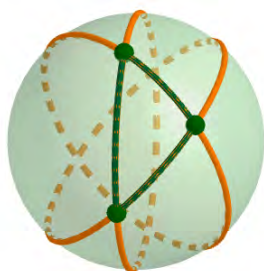


Figura 2. Triangle esfèric

Construcció

Iniciarem el procés de construcció definint un radi R amb un punt lliscant, i construint una esfera centrada a l'origen i de radi R . En aquesta esfera hi marcarem 3 punts (amb l'eina "Punt en un objecte"), que seran els 3 vèrtexs del triangle amb el qual treballarem per fer la construcció. El fet que es tracti de 3 punts sobre l'objecte ens permetrà, un cop feta tota la construcció, moure'ls i treballar amb diferents triangles esfèrics.

Per crear els tres arcs (costats del triangle) farem servir la comanda "ArcDeCircumferència (Centre, Punt, Punt)", que ens dibuixarà l'arc i ens en retornarà la longitud.

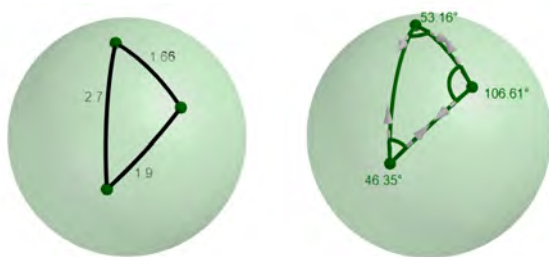


Figura 3 i 4. Arcs i angles, respectivament

Per poder representar els angles del triangle esfèric ho hem de fer a partir dels angles que formen les tangents als arcs que passen pels vèrtexs. Per fer-ho utilitzarem el comandament "Tangent(Punt,Cònica)" i, tot seguit, "Angle(Recta, Recta)". Per poder-ho visualitzar d'una manera més neta, podem representar els vectors directors unitaris de

les rectes tangents fent servir la comanda "Versor(Direcció(Recta))".

Aquesta petita construcció ens permetrà parlar de triangles isòsceles, equilàter i rectangle, però també de rectilàter (un arc recte), birectilàter (dos arcs rectes) i birectangle (dos angles rectes).

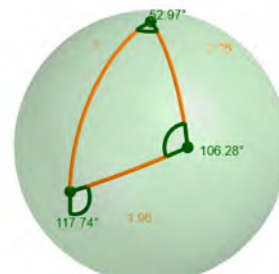


Figura 5. Triangle rectilàter

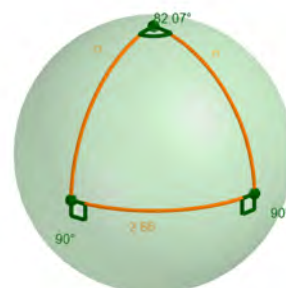


Figura 6. Triangle isòsceles, birectangle i birectilàter

GeoGebra permet treballar amb coordenades esfèriques. Si escriviu a la "Finestra algebraica" $(2; 20^\circ; 70^\circ)$ veureu que us apareix un punt a la "Finestra 3D". Podeu modificar els valors i veure què passa. Escriviu ara aquestes tres instruccions:

$$(t; 20^\circ; 70^\circ) \quad (2; t; 70^\circ) \quad (2; 20^\circ; t)$$

Entendreu perfectament el significat de cada terme de l'expressió. A més, si cliqueu a la configuració d'un punt, a la pestanya "Àlgebra", podem canviar el tipus de coordenades del punt. Si teniu un punt A (per exemple) en coordenades esfèriques (o no!), escriviu $\arg(A)$ i $\text{alt}(A)$ i mireu el que surt.

Una altra manera de representar un triangle esfèric és fer servir les superfícies paramètriques per "emplenar-lo". El primer que farem és definir els segments que uneixen els vèrtexs del triangle com a corbes. Amb dos n'hi haurà

prou. Si GeoGebra els anomena f i g , escriurem ara l'expressió següent:

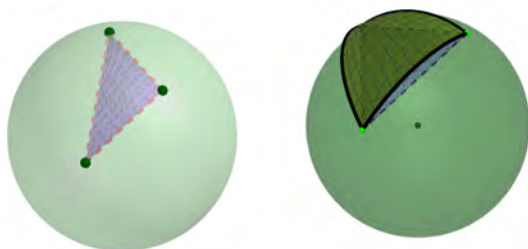
$\text{Superfície}(f(t)+k(g(-t+1)-f(t)), k, 0, 1, t, 0, 1)$

Entendreu el perquè si escriviu $g(t)$ en lloc de $g(-t+1)$. Fem servir el segment com a corba (abans no es podia), però GeoGebra el defineix amb un ordre determinat dels punts. El que fem és construir un triangle com a superfície paramètrica unint amb segments els punts d'un segment amb els de l'altre, la qual cosa es pot fer de dues maneres diferents, segons de quin punt a quin altre anem.

A partir d'aquí només cal escriure:

$\text{Superfície}((R; \arg(s(k, t); \text{alt}(s(k, t))), k, 0, 1, t, 0, 1)$

on R és el radi de l'esfera i s el nom de la superfície (o el que li hagi donat el programa). La idea és molt senzilla: projectem cada punt de la superfície paramètrica triangle a sobre de l'esfera "traslladant" el triangle a sobre de l'esfera.



Figures 7 i 8. Triangles paramètrics pla i esfèric

Amb aquesta nova construcció podem, per exemple, comparar les propietats dels triangles esfèrics versus les dels triangles plans.

A partir d'aquí surten moltes possibilitats, com pot ser el càlcul de l'àrea del triangle. Es pot veure molt bé en una construcció de José Manuel Arranz:

<https://www.geogebra.org/m/AURxPnkS>

Recordeu que us la podeu descarregar i veure com està feta. L'àrea també es pot calcular de manera aproximada, però cal treballar amb seqüències, i és tediós.

També podem construir un quadrilàter esfèric. La construcció és molt semblant, però amb quatre punts. El quadrilàter pla format pels quatre punts es pot definir en forma paramètrica, com en el cas del triangle, però fent servir dos segments oposats del quadrilàter. Per dibuixar la superfície paramètrica serveix la mateixa expressió que hem fet servir per al triangle.

Cal tenir en compte que els programes de seguiment d'activitats esportives (caminar, córrer, fer bicicleta) registren, segon a segon, la posició (latitud i longitud) i l'altitud de cada punt on som; només cal buscar l'opció "Exportar a gpx". L'arxiu es pot visualitzar, per exemple, a Google Earth. Es poden pensar moltes activitats didàctiques amb aquesta eina. Els programes esmentats tenen una versió bàsica gratuïta. D'altra banda, proveu d'escriure, per exemple, $30^\circ 40'$ a Google Maps i mireu on aneu a parar.

És tot un món!

Matemàtiques i art

Calidoscopis deltoidals

Josep Rey Nadal, Manuel Udina Abelló
Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA)

En l'exposició "Imaginary, una simfonia matemàtica", de la FME (UPC) 2021 el MMACA va presentar en primícia els *calidoscopis deltoidals*.

Aquest article és una adaptació de la descripció d'aquests calidoscopis que es va presentar a

Bridges 2022, un congrés dedicat a art i matemàtiques [6].

Els políedres regulars tenen molts plans de simetria. Si representem els plans de simetria amb miralls, es generen calidoscopis que, a partir d'una part del políedre, permeten vi-